

Schwerpunktshöhe und Trägheitsmoment des menschlichen Körpers

Rudolf Döschl

1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556029_0051

Aus dem Institut für Rechtsmedizin der Universität München
Vorstand: Prof. Dr. med. Wolfgang Spann

Schwerpunktshöhe und Trägheits-
moment des menschlichen Körpers

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde in der gesamten Medizin
verfaßt und einer Hohen Medizinischen Fakultät
der Ludwig Maximilians-Universität zu München



vorgelegt von

Dr. med. vet. Rudolf Döschl

aus

Fürstenzell

1974

Mit Genehmigung der Medizinischen Fakultät der Universität München

Berichterstatter: Prof. Dr. med. Wolfgang Spann

Dekan: Prof. Dr. med. Wolfgang Spann

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juni 1974



INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. EINLEITUNG	1
II. EINFÜHRUNG	2
A) Begriffsbestimmungen	2
B) Literatur	4
III. EIGENE UNTERSUCHUNGEN	10
A) Untersuchungsgut	10
B) Methodik	11
C) Ergebnisse	21
IV. DISKUSSION DER ERGEBNISSE	44
V. ZUSAMMENFASSUNG	47
VI. LITERATURVERZEICHNIS	49
LEBENS LAUF	53

I. EINLEITUNG

Zur Analyse des Bewegungsablaufes bei Verkehrsunfällen, insbesondere bei Fußgängerunfällen, ist die Kenntnis einer Reihe technischer Daten des menschlichen Körpers notwendig. Diese sind hauptsächlich: Lage des Schwerpunktes, Größe der Trägheitsmomente um die Schwerachsen des Rumpfes, der unteren Gliedmaßen und des ganzen Körpers, die Längenmaße und die Masse des Körpers.

In der Literatur finden sich dazu nur wenige Angaben, die zudem teils ungenau oder unzugänglich, teils nur an einzelnen Personen, nicht aber an einem repräsentativen Untersuchungsgut ermittelt wurden.

Nachdem in den letzten Jahren die theoretischen Grundlagen zur Berechnung der Bewegungsabläufe bei Verkehrsunfällen auch für die darin verwickelten Personen bekannt geworden sind, hat die Ermittlung der technischen Daten des menschlichen Körpers besonderes Interesse erlangt. Daher wurde in der vorliegenden Arbeit die Lage der Schwerpunktshöhe um die horizontale latero-laterale Schwerachse und das Trägheitsmoment des menschlichen Körpers an einer größeren Anzahl von Personen untersucht.

II. EINFÜHRUNG

A Begriffsbestimmungen

Die Lage des Schwerpunktes ist von besonderer Bedeutung, weil bei einem (starrten) Körper alle auf den Körper infolge seiner Masse wirkenden Kräfte (Schwerkraft, Trägheit) dort angreifen. Darüber hinaus ist das von allen anderen auf den Körper wirkenden Kräften hervorgerufene Drehmoment abhängig vom Abstand des Angriffspunktes zum Schwerpunkt.

Unter dem Trägheitsmoment Θ versteht man den Trägheitswiderstand, den ein Körper einer Drehbeschleunigung entgegensetzt. Damit entspricht bei einer Drehbewegung das Trägheitsmoment formal der Masse (m) bei geradliniger Bewegung.

geradlinige Bewegung:

(1) Kraft = Masse mal Beschleunigung

Drehbewegung:

Drehmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung

Anders ausgedrückt bedeutet das: "Die durch eine gegebene Kraft erzielte Beschleunigung ist umso größer, je kleiner die Masse ist" und "die durch ein gegebenes Moment erzielte Drehbeschleunigung ist umso größer, je kleiner das Trägheitsmoment ist." Das Trägheitsmoment wird daher häufig auch als "Drehmasse" bezeichnet.

Das Trägheitsmoment wird bestimmt durch die Massenverteilung relativ zur Drehachse. Es ist also abhängig von der Masse und der Form des Körpers und von der Lage des Drehpunktes bzw. der Drehachse. Dabei sind von besonderer Bedeutung die Trägheitsmomente in Bezug auf

die durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Achsen.

Ist das Trägheitsmoment um eine Schwerachse bekannt, so läßt sich das Trägheitsmoment für jede beliebige, zu dieser Schwerachse parallelen Achse nach dem Steiner-schen Satz berechnen: Ist Θ_s das Trägheitsmoment um die Schwerachse, so gilt für das Trägheitsmoment Θ_p dieser parallelen Achse durch den Punkt P im Abstand a von der Schwerachse (Abb. 1):

$$(2) \quad \Theta_p = \Theta_s + m \cdot a^2$$

Häufig wird statt des Trägheitsmomentes der sogenannte "Trägheitsradius" angegeben oder verwendet: Man denkt sich die Masse m eines Körpers mit dem Trägheitsmoment Θ_s auf einem Zylindermantel angeordnet, dessen Radius k so groß ist, daß der Zylindermantel das gleiche Trägheitsmoment hat wie der Körper. Es gilt dann die Definition:

$$(3) \quad \Theta_s = m \cdot k^2 \qquad k = \text{Trägheitsradius}$$

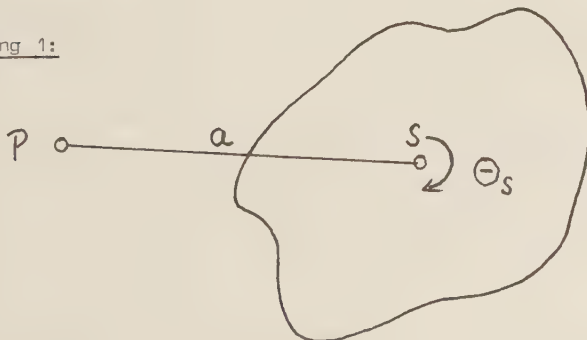
oder

$$(4) \quad k^2 = \frac{\Theta_s}{m}$$

Der Steinersche Satz (Gleichung 2) lautet damit:

$$(5) \quad \Theta_p = m \cdot (k^2 + a^2)$$

Abbildung 1:



B LITERATUR

Bereits vor drei Jahrhunderten beschäftigten sich Wissenschaftler mit der Schwerpunktslage im menschlichen Körper. Der Mathematiker BORELLUS (1679) bestimmte den Schwerpunkt des menschlichen Körpers dadurch, daß er einen Menschen in ausgestreckter Lage auf ein ebenes Brett legte, dessen Mitte durch einen dreiseitigen prismatischen Keil unterstützt wurde. Die Gleichgewichtslage trat dann ein, wenn die senkrechte Verlängerung der Schneide des Keiles nach aufwärts zwischen Hinterbacken und Scham (inter nates et pubium) zu liegen kam. Diese Methode wurde von den Gebrüdern WEBER (1836) verbessert: Sie brachten zunächst das Brett auf dem Keil ins Gleichgewicht und legten erst dann den Körper auf, wobei sie den Körper auf dem Brett verschoben. Dadurch wurde die Messung unabhängig von der Lage des Brettes. Bei einem 166,9 cm langen Mann ermittelten sie eine Schwerpunktslage von 94,7 cm über der Ferse. VON MEYER (1854) stellte als nächster Untersuchungen an über "die wechselnde Lage des Schwerpunktes im menschlichen Körper" und berichtete 1873 über die "Statik und Mechanik des menschlichen Körpers". Er bestimmte die Schwerpunkte einzelner Körperteile, indem er Kopf, Rumpf und Extremitäten einfachen mathematischen Körpern (Ellipsoide und Kegel) gleichsetzte. HARLESS (1860) wiederholte den WEBER'schen Versuch an einem 24jährigen, lebenden und gleichmäßig gewachsenen Mann mit einer Körpergröße von 165,5 cm: Der Abstand des Körperschwerpunktes von der Sohle betrug 97,0 cm. Vergleichbare Werte zwischen den einzelnen Messungen versuchte HARLESS dadurch zu gewinnen, daß er die verschiedenen Körperlängen gleich 1000 setzte und darauf den Schwerpunktsabstand jeweils vom Scheitel und von der Sohle berechnete. HARLESS bestimmte auch an zwei entbluteten Leichen die Schwerpunktslagen einzelner Körperabschnitte:

Bei der einen, 172,6 cm langen und 63,9 kg schweren männlichen Leiche fand er eine Schwerpunkts Höhe für den Gesamtkörper von 101,2 cm über der Ferse und für eine untere Gliedmaße von 51,3 cm bei einer Gesamtlänge von 87,8 cm. FISCHER und BRAUNE (1889) ermittelten im Gegensatz zu den bisher genannten Autoren die Schwerpunktslagen des Körpers und seiner Glieder in allen drei Schwerachsen anatomisch genau, bezogen auf markante Punkte (Kreuzbeinwirbel, Promontorium der Basis ossis sacri). Die vier untersuchten männlichen Leichen wurden gefroren, und bei dreien davon wurden der Kopf und die vier Gliedmaßen in den Gelenken abgesägt. Anschließend bestimmten sie die Schwerpunktslagen durch Pendeln. Bei der Versuchsleiche Nr. I, einem 18 Jahre alten und 169 cm langen Mann, lag der Schwerpunkt des Körpers "in der Höhe des unteren Randes des zweiten Kreuzbeinwirbels, nahezu in der Ebene des Beckeneinganges, 0,5 cm nach rechts von der Medianebene, 4,5 cm unter dem Promontorium, in der Ebene, welche durch das Promontorium und die Mittelpunkte der beiden Hüftgelenkköpfe bestimmt ist". Bei der Leiche (Nr. II) eines 45 Jahre alten, 170 cm langen und 75,1 kg schweren Mannes wurde der Schwerpunkt des Körpers nahe am Promontorium gefunden. Bei der Leiche (Nr. III) eines 50jährigen, 166 cm langen und 60,75 kg schweren Mannes lag der Körperschwerpunkt "in einer Transversalebene, die durch den unteren Rand des ersten Kreuzbeinwirbels ging, also nicht im Promontorium selbst, sondern nahe demselben, etwas darunter. Er lag 0,2 cm nach rechts von der Medianebene und 4 cm vor der obersten Linea transversa des Kreuzbeines". Bei der vierten und letzten untersuchten Leiche eines 168,8 cm langen und 56,09 kg schweren Mannes fiel der Körperschwerpunkt "in die Höhle des kleinen Beckens. Er lag in der Medianebene des Körpers, 2,1 cm

senkrecht unter dem Promontorium und 4,5 cm über der Verbindungslinie beider Mittelpunkte der Oberschenkelköpfe, in gleicher Höhe mit dem oberen Rande vom dritten Kreuzbeinwirbel, 7 cm davor und 7 cm höher als der obere Rand der Symphyse". Nach ihren Berechnungen teilt der Schwerpunkt die Strecke zwischen den beiden begrenzenden Gelenkmittelpunkten in einem bestimmten für alle Individuen von ähnlicher Gestalt gleichen Verhältnis. Es verhält sich der Abstand des Schwerpunktes vom proximalen zu dem vom distalen Gelenkmittelpunkt

beim	Oberarm	0,47 : 0,53
	Unterarm	0,42 : 0,58
	Oberschenkel	0,44 : 0,56
	Unterschenkel	0,42 : 0,58
	Fuß	0,43 : 0,57.

Sie fassen zusammen, daß "der Schwerpunkt von den einzelnen Extremitätsabschnitten über die Mitte derselben zu liegen kommt und die Entfernung der beiden Gelenkachsen resp. Gelenkmittelpunkte voneinander im Verhältnis von 4 : 5 teilt." Sie vergleichen ihre Ergebnisse mit den Werten von HARLESS und finden eine weitgehende Übereinstimmung. 1892 veröffentlichten dieselben Autoren ihre "Untersuchungen über die Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder". Zwei gefrorene Leichen wurden in mehrere Teile zerlegt: Kopf, Rumpf, Oberarm, Unterarm + Hand, Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß, wobei die Schnitte in den Gelenken durchgeführt wurden. Nach Ermittlung des Gewichtes und der Entfernung des Schwerpunktes des betreffenden Körperteiles von den begrenzenden Gelenken wurde das Trägheitsmoment mit Hilfe von Pendelschwingungen um Achsen durch die Gelenkmittelpunkte bestimmt. In der ersten Versuchsreihe diente als Achse entweder eine an beiden Enden fest fixierte Stahlnadel,

um die sich der Körperteil drehen mußte, oder zwei sich gegenüberliegende Stahlspitzen. Da die Reibung zwischen dem Gewebe des schwingenden Gliedes und der Stahlachse die natürliche Schwingungsdauer erheblich beeinflusste, wurden in der zweiten Versuchsreihe zwei quadratische Stahlstäbe fest mit dem schwingenden Körper verbunden. Die jeweils dem Schwerpunkt des Gliedes zugekehrte und auf zwei Glasstäbchen ruhende Kante des Stabes wurde als Schwingungsachse benutzt. Aus den beiden Schwingungsdauern, dem Abstand beider Achsen und der Masse des Körperteils ließ sich das Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele Achse durch den Schwerpunkt errechnen, aber auch gleichzeitig eine sehr genaue Bestimmung der Entfernung des Schwerpunktes von den parallelen Schwingungsachsen. Sie fanden, daß die Trägheitsmomente für alle durch denselben Punkt gehenden Schwingungsachsen senkrecht zur Längsachse annähernd gleich sind. Obwohl die Messungen nur an zwei Leichen durchgeführt wurden, faßten sie zusammen, daß bei allen Gliedern des menschlichen Körpers das Verhältnis zwischen dem Trägheitsradius in Bezug auf irgendeine zur Längsachse senkrechten Achse durch den Schwerpunkt und zwischen der Länge des Gliedes nahezu konstant = 0,30 und beim Oberschenkel, Unterschenkel und Oberarm das Verhältnis zwischen dem Trägheitsradius in Bezug auf die Längsachse und zwischen der mittleren Dicke des Gliedes nahezu konstant = 0,35 ist. Mit Hilfe dieser beiden Werte konnten auch an lebenden Personen die Trägheitsmomente durch einfache Längen- und Dickenmessung bestimmt werden.

FISCHER (1899) beschäftigte sich in einer weiteren Arbeit mit dem Schwerpunkt, im Besonderen mit der Bewegung des Gesamtschwerpunktes und der äußeren Kräfte beim Gang des Menschen. Er setzte sich mit den verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Schwerpunkts-

bahn während des Gehens auseinander, berechnete die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes für 31 Bewegungsphasen, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesamtschwerpunktes und die Komponenten der äußeren Kräfte, die während des Gehens auf den menschlichen Körper einwirken. Schließlich konstruierte er einen Gelenkmechanismus aus Stäben, der den Gesamtschwerpunkt und die Schwerpunkte verschiedener Abschnitte des menschlichen Körpers selbsttätig angibt.

Darüber hinaus erarbeitete FISCHER (1906) auch theoretische Grundlagen für eine Mechanik lebender Körper, in denen die Erkenntnisse aus seinen früheren Untersuchungen verwertet sind.

Die Anwendung von Gesetzen der Mechanik auf Körperbewegungen unter spezieller Berücksichtigung von Arbeitssituationen war Gegenstand einer Arbeit von AMAR (1920).

Auch DEMPSTER (1955) soll im Rahmen der Untersuchungen über funktionelle Platzanforderungen des sitzenden Arbeiters einige Trägheitsmomentbestimmungen bringen (LIU et al., 1971).

Auf der Basis der Messungen von FISCHER und BRAUNE (1889) und DEMPSTER (1955) errechnete BARTER (1957) Daten zur Massenbestimmung von Körperteilen bei gegebenem Körpergewicht der Person:

Tabelle 1: Massenbestimmung einzelner Körperteile bei bekanntem Körpergewicht (nach BARTER, 1957)

G Kopf, Hals	= 0,079 G_t
G Rumpf	= 0,391 G_t + 12 (Pound)
G Oberarme	= 0,08 G_t - 2,9 "
G Unterarme, Hände	= 0,06 G_t - 1,4 "
G Oberschenkel	= 0,18 G_t + 3,2 "
G Unterschenkel, Füße	= 0,13 G_t + 0,5 "

(G_t = Gesamtgewicht der Person)

SANTSCHI, DUBOIS und OMOTO (1963) bestimmten Trägheitsmomente und Schwerpunkte des lebenden Körpers in verschiedenen Positionen. HANAVAN (1964) entwarf ein mathematisches Modell des menschlichen Körpers: Er ersetzt die Hauptkörperteile durch einfache geometrische Körper homogener Massenverteilung und berechnet die theoretischen Trägheitsmomente des ganzen Körpers; eine Methode, die von vielen Autoren später übernommen wurde.

KROGMAN und JOHNSON (1963) faßten die Arbeiten von BRAUNE und FISCHER (1889), FISCHER (1906), AMAR (1920) und DEMPSTER (1955) in einem einzigen Werk unter dem Titel "Human Mechanics" zusammen. Im Hinblick auf ihre Bedeutung bei Beschleunigungsverletzungen der Wirbelsäule zersägten LIU, LABORDE und VAN BUSKIRK (1971) Kopf, Hals und Rumpf einer gefrorenen Leiche in 25 horizontale Segmente, bestimmten die Trägheitsmomente der einzelnen Scheiben mit einem Torsionspendel, ermittelten die Schwerpunkte und beschrieben ein mathematisches Modell der Wirbelsäulenreaktion auf Beschleunigungsschläge.

ROBBINS et al. (1971) vermaßen sechs Testpersonen nach klassischen anthropometrischen Gesichtspunkten und berechneten mathematisch-analytisch Trägheitsmomente und Schwerpunkte wie HANAVAN durch Zurückführen der Körperteile auf geometrische Figuren.

III. EIGENE UNTERSUCHUNGEN

A Untersuchungsgut

Die Untersuchungen wurden durchgeführt an vollständig erhaltenen, gekühlten und möglichst frischen Leichen, die zur Sektion oder zur Leichenschau in das Gerichtsmedizinische Institut der Universität München eingeliefert wurden. Todesursachen waren in erster Linie tödliche Unfälle und Suizide.

Es wurden auch Versuche mit lebenden Personen durchgeführt. Infolge der ständigen, wenn auch nur geringen Schwerpunktsverlagerung während des Atmens der Versuchspersonen wurden die Messungen gestört, sodaß vergleichbare Werte nur bei Anhalten der Atmung während der gesamten Schwingungsdauer erzielt werden konnten. Daher wurde auf eine größere Anzahl von Messungen an Lebenden verzichtet.

Insgesamt wurden untersucht:

Tabelle 2:

	männlich	weiblich
Anzahl der Versuchspersonen	29	16
Alter	10-76 Jahre	16-82 Jahre
Gewicht	38-125 kg	39-81 kg
Länge	147-186 cm	145-168 cm

B Methodik

Üblicherweise werden Schwerpunkte und Trägheitsmomente unregelmäßig geformter Körper durch Pendeln bestimmt. Dazu wird der Körper so aufgehängt, daß er um eine feste, zu der für das Trägheitsmoment maßgeblichen Schwerachse parallelen Achse unter dem Einfluß der Schwerkraft frei pendeln kann. Die gesuchten Größen können dann aus der Schwingungsdauer berechnet werden. In der vorliegenden Arbeit wurden diese Methoden nur für die in Tabelle 12 mitgeteilten Messungen an den unteren Gliedmaßen verwendet.

Für die Schwingungsdauer T eines Körperpendels gilt, solange der Pendelwinkel φ_0 klein ist:

$$(6) \quad (\varphi_0 < 1) : T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta_p}{m \cdot g \cdot a}} \quad \text{Abb. 2}$$

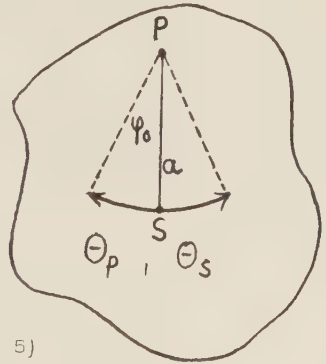
Θ_p = Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse durch P

m = Masse

g = Fallbeschleunigung

a = Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt

(Vergl. Abb. 2)



Mit dem Steiner'schen Satz (Gleichung 5)

$$\Theta_p = m(k^2 + a^2)$$

erhält man

$$(7) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{k^2 + a^2}{g \cdot a}}$$

und weiter

$$(8) \quad k^2 = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2 a - a^2$$

Da der Schwerpunktsabstand a nicht bekannt ist, sind zur Bestimmung von k^2 und a zwei Pendelversuche mit unterschiedlicher Pendellänge notwendig. Beträgt die Pendellänge (bzw. der Schwerpunktsabstand von der Pendelachse) wie in Abb. 2 skizziert im 1. Versuch a und die Schwingungsdauer T_1 , im 2. Versuch $a + b$ und die Schwingungsdauer T_2 , so gilt nach Gleichung 8 das Gleichungssystem:

$$(1.) \quad k^2 = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T_1^2 \cdot a - a^2$$

(9)

$$(2.) \quad k^2 = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T_2^2 \cdot (a + b) - (a + b)^2$$

Da b , T_1 und T_2 bekannt sind, ergibt sich für den Schwerpunktsabstand a :

$$(10) \quad a = \frac{\frac{g}{4\pi^2} \cdot T_2^2 \cdot b - b^2}{\frac{g}{4\pi^2} (T_1^2 - T_2^2) + 2b}$$

und für den Trägheitsradius

$$(11) \quad k^2 = \frac{g}{4\pi^2} T_1^2 \cdot a - a^2$$

Die Genauigkeit dieser Methode ist in komplizierter Weise von der Wahl der Größen a und b sowie vom Trägheitsmoment und der Masse des untersuchten Körpers abhängig. Der Fehler kann daher nicht generell angegeben werden, sondern ist vielmehr in jedem Falle aus den Versuchsdaten abzuschätzen.

Will man auf das Einfrieren der Leichen verzichten, so ergeben sich für die Pendelversuche mit Leichen erheb-

liche technische Schwierigkeiten; schon die dazu notwendige Handhabung der Leichen ist ohne technische Hilfsmittel kaum möglich. Eine reproduzierbare und während der Versuchsdauer konstante Aufhängung der Leichen, etwa durch ein Gurt- oder Haltearmsystem, läßt sich kaum realisieren. Das In-sich-Schwingen des Körpers und/oder seiner Gliedmaßen kann nur durch umfangreiches Bandagieren vermieden werden. Schließlich sprechen auch ästhetische Gesichtspunkte und der besondere Aufwand, diese Experimente an lebenden Personen durchzuführen, gegen derartige Versuche. Daher wurde für die Bestimmung des Schwerpunktes und des Trägheitsmoments des ganzen Körpers in dieser Arbeit eine schwingungsfähige Wippe konstruiert, deren Prinzip in Abb. 3 dargestellt ist. Dabei wird der Körper auf ein einseitig durch zwei Zugfedern gehaltenes Brett so aufgelegt, daß Gleichgewicht herrscht.

Abbildung 3: Prinzip der Vorrichtung zur Bestimmung der Schwerpunktshöhe (h_s) und des Trägheitsmomentes um die latero-laterale Schwerachse (Erklärung im Text).

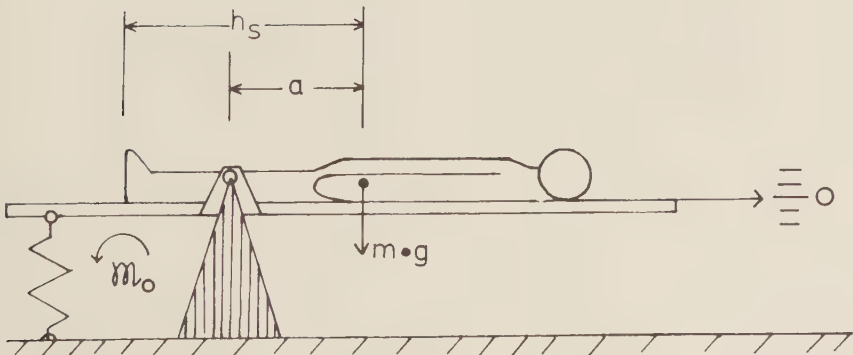
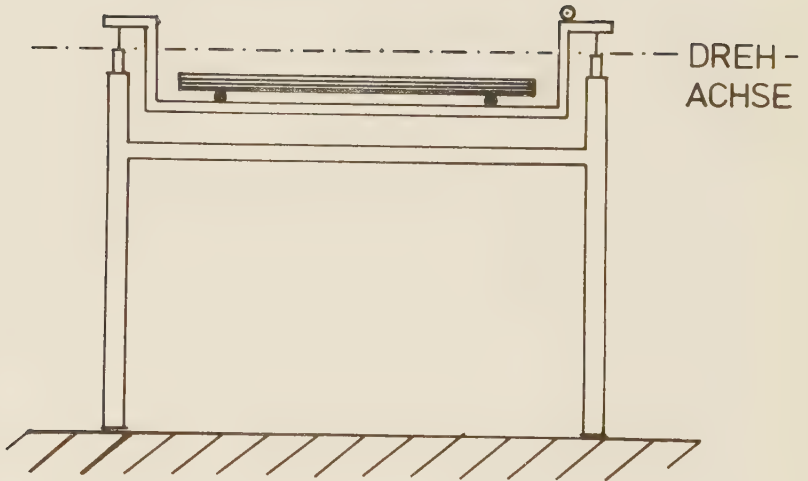


Abbildung 4: Wippe - Querschnitt im Drehpunkt



Sind die technischen Daten der Wippe bekannt, so lassen sich aus dem Gleichgewicht die Lage des Schwerpunktes, aus der Schwingungsdauer das Trägheitsmoment des Körpers berechnen.

Für die in dieser Arbeit mitgeteilten Untersuchungen stand die in Abbildung 3 und 4 dargestellte Wippe zur Verfügung. Als Auflage diente ein 50 cm breites und 250 cm langes, durch einen Rohrrahmen versteiftes Brett, das auf der einen (rechten) Seite von der Drehachse 150 cm und auf der anderen (linken) Seite 100 cm weit reichte. Das Auflagebrett war über einen Querträger auf in der Höhe verstellbaren, aus gehärtetem Stahl gefertigten Spitzen gelagert. Durch die u-förmige Konstruktion des Querträgers sollte erreicht werden, daß der Schwerpunkt des Gesamtsystems (Auflagebrett und Körper der Versuchsperson) möglichst auf gleicher Höhe mit der Drehachse sich befindet. Dies ist eine wichtige Voraussetzung zur fehlerfreien Bestimmung der Trägheitsmomente. Die zwei parallel wirkenden Stahlfedern waren in Verbindung mit dem Gegengewicht G so ausgesucht, daß bei hinreichender Empfindlichkeit zur Bestimmung der Schwerpunktslage sich eine mittlere Schwingungsdauer von 1 - 2 Sekunden ergab. Diese Schwingungen sind langsam genug, um ein In-sich-Schwingen des Körpers bzw. seiner Organe zu vermeiden. Mit Hilfe eines auf dem Querträger montierten Lichtzeigers konnte die Nullstellung der Wippe erreicht und die Schwingungsamplitude kontrolliert werden. Als Unterbau diente ein stabiles Rohrgestell.

Bestimmung der Schwerpunktslage des menschlichen Körpers

Ist das durch die Federkraft, das Gegengewicht und das Eigengewicht des Brettes bei 0 - Stellung hervorgerufene Moment M_0 bekannt, so gilt bei Gleichgewicht, d.h. wenn der Körper der Versuchsperson so aufgelegt wurde, daß die Nullstellung erreicht ist:

$$(12) \quad M_0 = a \cdot G = a \cdot m \cdot g$$

G = Gewicht der Versuchsperson

a = Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse

Es ergibt sich sofort die Lage des Schwerpunktes in Bezug auf die Drehachse zu

$$(12a) \quad a = \frac{M_0}{G}$$

und daraus mit der Körperlänge und dem Abstand Achse - Scheitel die Höhe des Schwerpunktes:

$$(13) \quad h_s = \text{Länge} + a - (\text{Achse/Scheitel})$$

Bestimmung von M_0 :

Zur Bestimmung des Momentes M_0 wurden verschiedene Gewichte in verschiedenen Abständen zum Drehpunkt so aufgelegt, daß jedesmal Gleichgewicht bestand. Das auf der rechten Seite erzeugte Moment wurde für jedes Experiment nach

$$(14) \quad M = G_1 \cdot a_1 + G_2 \cdot a_2 + \dots$$

berechnet. In den fünf durchgeführten Messungen wurden folgende Werte ermittelt:

$$M_1 = 34,370 \text{ mkp}$$

$$M_2 = 34,126 \text{ mkp}$$

$$M_3 = 33,920 \text{ mkp}$$

$$M_4 = 33,917 \text{ mkp}$$

$$M_5 = 33,800 \text{ mkp}$$

Daraus ergibt sich als Mittelwert:

$$M_0 = 34,0 \text{ mkp} \pm 0,7\% \text{ (einfache Streuung)}$$

Abschätzung des Fehlers bei der Schwerpunktsbestimmung:

Aus der Streuung der Meßwerte bei der Bestimmung von

$$M_0 \text{ ergibt sich ein größtes } \frac{\Delta M}{M_0} \text{ von } \frac{0,570}{34,0} = 0,02$$

Bei einer Stricheinteilung der Waage zur Bestimmung der Körpergewichte g von 100 g ist der relative Fehler

$$\frac{\Delta g}{g} < \frac{0,1}{70} = 0,003$$

Damit wird der maximale Fehler für a :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta M}{M_0} + \frac{\Delta g}{g} = 0,02 + 0,003 = 0,023$$

Bei einem mittleren Wert von $a = 0,6 \text{ m}$ wird

$$\Delta a = 0,6 \cdot 0,023 = 0,014 \text{ m.}$$

Der absolute Fehler der Schwerpunktschöhe (Δh_s) ergibt sich dann aus dem Fehler Δa + dem Fehler aus der Bestimmung der Körperlänge + dem Fehler in der Bestimmung des Abstandes Achse/Scheitel. Letzterer war $< 0,005 \text{ m}$. Der größte Fehler lag in der Bestimmung der Körperlänge, einerseits wegen der Unsicherheit des Bezugspunktes an der Fersensole infolge der bei Leichen üblichen leicht supinierten Stellung der Füße, andererseits wegen der nicht immer vollständig durchgestreckten Kniegelenke. Es kann damit ein Fehler für h_s von $\pm 0,03 \text{ m}$ angenommen werden. Bei der in den Meßergebnissen dargestellten Auftragung der Höhe h_s , bezogen

auf die Körperlänge l bleibt jedoch der wesentliche, von der Körperlänge l herrührende Fehler ohne Bedeutung.

Bestimmung des Trägheitsmomentes

Bei kleinen Amplituden und bei Vernachlässigung der Reibung gilt für die Schwingungsdauer T der verwendeten Wippe (G. BEIER, persönliche Mitteilung)

$$(15) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{CR^2} \cdot \theta_A$$

wobei C = Federkonstante

R = Hebelarm der Federkraft

θ_A = Trägheitsmoment des Gesamtsystems
um den Drehpunkt A der Wippe

Es gilt ferner

$$(16) \quad \theta_A = \theta_B + \theta_L$$

D.H.: Das Trägheitsmoment des Gesamtsystems, bezogen auf den Drehpunkt A, ist gleich dem Trägheitsmoment des Brettes plus dem Trägheitsmoment der aufgelegten Last, bezogen auf A.

Damit wird Gleichung 15:

$$(17) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{CR^2} \cdot \theta_B + \frac{4\pi^2}{CR^2} \cdot \theta_L$$

$\frac{4\pi^2}{CR^2} \cdot \theta_B$ und $\frac{4\pi^2}{CR^2}$ sind durch die Konstruktion der

Wippe vorgegebene Konstanten. Sind diese Konstanten bekannt, so läßt sich θ_L aus T bzw. T^2 bestimmen. Mit Hilfe des Steiner'schen Satzes berechnet sich sodann θ_s nach

$$(18) \quad \theta_s = \theta_L - m \cdot a^2$$

Zur numerischen Berechnung läßt sich mit Gleichung 12

$$a = \frac{M_0}{m \cdot g}$$

setzen und man erhält

$$(19) \quad \theta_s = \theta_L - \frac{M_0}{g} \cdot a$$

$$\text{mit } \frac{M_0}{g} = 3,469$$

Eichung der Wippe

Die Konstanten $\frac{4\pi^2}{CR^2} \cdot \theta_B$ und $\frac{4\pi^2}{CR^2}$ wurden dadurch be-

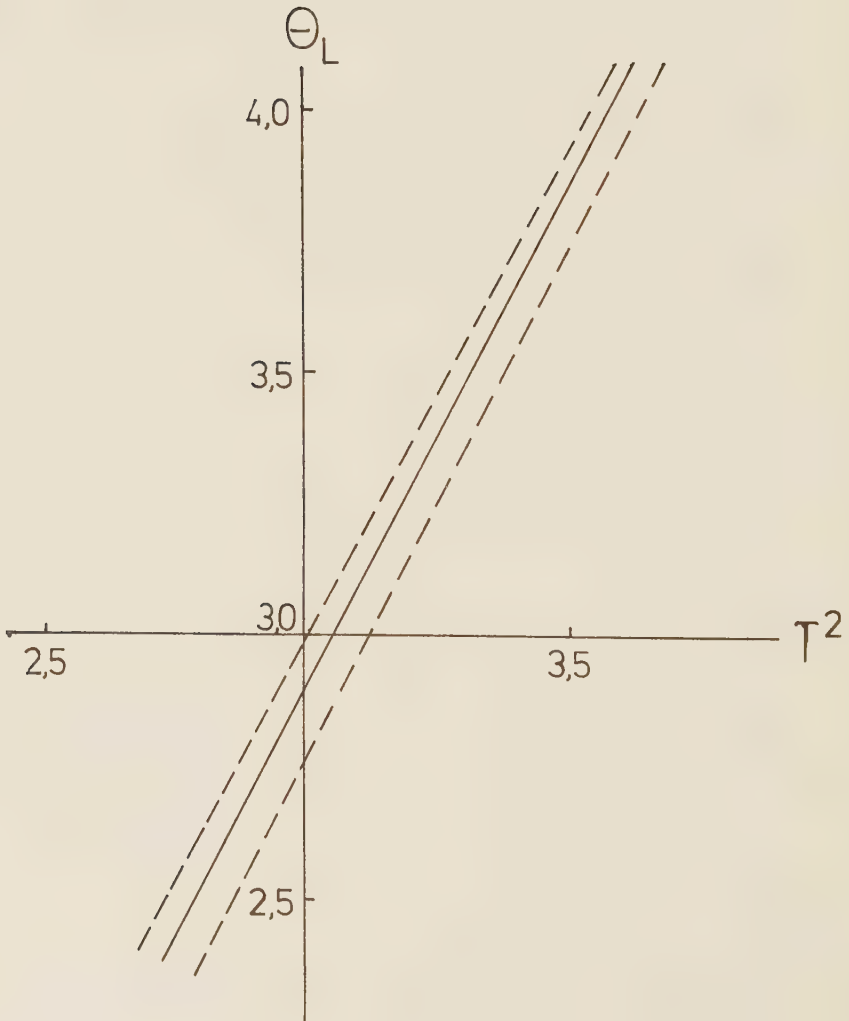
stimmt, daß verschiedene Gewichte mit den Massen m (m_1 , m_2 , m_3 ) in verschiedenen Abständen (a_1 , a_2 , a_3 ) aufgelegt und die zugehörigen Schwingungsdauern bestimmt wurden. Das jeweilige θ_L wurde berechnet nach

$$\theta_L = m_1 \cdot a_1^2 + m_2 \cdot a_2^2 + \dots\dots\dots$$

nd gegen T^2 aufgetragen. Die erhaltene Eichkurve ist in der graphischen Darstellung 1 wiedergegeben.

Als Gewichte dienten Bleibarren von je ca. 7,4 bis 7,8 kg mit den Abmessungen 15 x 8 x 6 cm. Um den Einfluß unterschiedlicher Höhen des Schwerpunktes über dem Auflegebrett, wie sie bei verschiedenen dicken Versuchspersonen vorkommen, zu ermitteln, wurden die Messungen sowohl mit hochkant als auch mit flachkant gelagerten Gewichten vorgenommen. Dadurch ergaben sich für die Eichgerade, die einen Mittelwert darstellt, eine darüber liegende Parallelgerade für die flach über dem Brett gelegenen Schwerpunkte und eine darunter liegende Parallelgerade für die hoch über dem Brett gelegenen Schwerpunkte.

Graphische Darstellung 1: Eichkurve der Wippe



C ERGBNISSE

Die an 45 Versuchspersonen durchgeführten Messungen wurden in Tabelle 3 bis 12 getrennt nach männlichen und weiblichen Personen und nach steigendem Körpergewicht zusammengefaßt. Der Vollständigkeit halber werden auch jene Daten angegeben, die als Meßgrößen ausschließlich versuchsbedingt sind: Abstand zwischen der Drehachse der Wippe und dem Scheitel der Versuchsperson, die Schwingungsdauer T der Wippe, das Trägheitsmoment θ_L der Versuchsperson um die Drehachse der Wippe und der Abstand a zwischen der Drehachse der Wippe und dem Schwerpunkt des Körpers. Neben Länge und Gewicht als wichtigste Daten wurden noch folgende Werte festgehalten: Abstand Scheitel zum kranialen Schulterrand (y_1), Armlänge sowohl zwischen Processus Coracoideus der Scapula und dem Fingergrundgelenk (y_2) als auch zwischen Achselgrube und Fingergrundgelenk (y_3), Schrittlänge der unteren Gliedmaße (y_4), Durchmesser des Körpers über dem Nabel (y_5) und Abstand zwischen der Spina iliaca anterior superior (Darmbeinstachel) und der Fußsohle (y_6).

Mit Hilfe dieser Daten sollten Beziehungen hergestellt werden zwischen leicht zu ermittelnden Körpermaßen (Länge und Gewicht) und der Höhe des Körperschwerpunktes über der Fersensohle einerseits und dem Trägheitsmoment des Körpers um seinen Schwerpunkt andererseits.

Ferner wurde in drei Versuchen die linke untere Gliedmaße der jeweiligen Versuchsperson im Hüftgelenk abgetrennt, sodaß Schwerpunkt und Trägheitsmoment sowohl der unteren Extremitäten als auch des restlichen Körpers bestimmt werden konnten.

Liste der in den Tabellen verwendeten Abkürzungen

Achse - Scheitel	Abstand Drehachse der Wippe zum Scheitel der Versuchsperson
y_1	Abstand Scheitel des Kopfes zum kranialen Schulterrand
y_2	Abstand kranialer Schulterrand zum Fingergrundgelenk
y_3	Abstand Achselgrube zum Fingergrundgelenk
y_4	Schrittlänge der unteren Extremität bis zur Fersensole
y_5	Dorso-ventraler Körperdurchmesser über dem Nabel
y_6	Abstand spina iliaca anterior superior zur Fersensole
a	Abstand Drehachse der Wippe zum Körperschwerpunkt
Höhe S, h_s	Schwerpunktshöhe des Körpers um die horizontale, latero-laterale Schwerachse (frontale Achse)
FS	Fersensole
T	Schwingungsdauer der Wippe
k	Trägheitsradius
θ_L	Trägheitsmoment der Versuchsperson um die Drehachse der Wippe
θ_s	Trägheitsmoment um den Schwerpunkt
O	Oberkörper
e_o	Abstand Schwerpunktshöhe Oberkörper zur Schwerpunktshöhe des Gesamtkörpers

Tabelle 3: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	28a	28b	5	4	15
leb./tot	leb.	leb.	leb.	leb.	tot
Geschl.	männl.	männl.	männl.	männl.	männl.
Alter (Jahre)	10	10	11	10	72
bekleidet	ja, mit Schuhen	ja, o. Schuhe	ja	ja	nein
Länge (cm)	150	147,5	148	151	158,5
Gewicht (kg)	38,9	37,5	38,45	39,45	49,0
Achse - Schei- tel (cm)	155,7	156,2	158	154,5	136
y_1 (cm)	23	23		23	23,5
y_2	54	54		54	67
y_3	46	46		46	50
y_4	72	70		72	70
y_5	15	15		15	16
y_6	85	85		85	90
T (sec)	1,830	1,834	1,826	1,833	1,754
θ_L	3,556	3,585	3,525	3,575	3,04
a (cm)	87,5	90,7	88,5	86,3	69,4
θ_s	0,521	0,437	0,455	0,583	0,631
$k^2 (m^2)$	0,131	0,114	0,116	0,145	0,126
k (m)	0,362	0,338	0,340	0,381	0,355
Höhe S (cm)	81,8	82,0	78,5	82,5	91,9

Tabelle 4: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	26	31a	31b	31c	25
leb./tot	tot	leb.	leb.	leb.	tot
Geschl.	männl.	männl.	männl.	männl.	männl.
Alter (Jahre)	20	12	12	12	64
bekleidet	nein	ja, mit Schuhen	ja, o. Schuhe	ja, Arme ü. Kopf	nein
Länge (cm)	160,5	163,5	159,0	159,0	172
Gewicht (kg)	53,5	56,6	55,2	55,2	58,2
Achse - Schei- tel (cm)	132,5	133,5	132,5	128	130
y_1 (cm)	22,5	22			23
y_2	65	59			72
y_3	49	50			55
y_4	73	75			82
y_5	20	20			19
y_6	89	92			98
T (sec)	1,744	1,749	1,723	1,769	1,761
θ_L	2,97	3,0	2,825	3,135	3,08
a (cm)	63,6	60,1	61,6	61,6	58,4
θ_s	0,763	0,914	0,686	0,996	1,051
k^2 (m ⁻²)	0,140	0,158	0,122	0,177	0,177
k (m)	0,374	0,398	0,348	0,420	0,421
Höhe S (cm)	91,6	90,1	88,1	92,6	100,4

Tabelle 5: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	2	8	32	33	45
leb./tot	tot	tot	tot	tot	tot
Geschl.	männl.	männl.	männl.	männl.	männl.
Alter(Jahre)	39	16	45	30	25
bekleidet	nein	nein	nein	ja, o. Schuhe	nein
Länge (cm)	157	181,5	168	169,5	178
Gewicht (kg)	61,9	62,5	62,9	63,3	63,5
Achse - Schei- tel (cm)		132,5	123	126,5	129,5
y_1 (cm)	23	25	23,5	24	25
y_2	65	73	69	69	70
y_3	51	56	57	49	55
y_4	74	86	79	80	88
y_5		16,5	20	22	18,5
y_6		103	100	98	105,5
T (sec)	1,443	1,744	1,729	1,730	1,763
θ_L	1,98	2,97	2,87	2,88	3,10
a (cm)	43,5	54,4	54,0	53,7	53,5
θ_s	0,781	1,081	0,993	1,015	1,241
k^2 (m ²)	0,123	0,169	0,154	0,157	0,191
k (m)	0,351	0,411	0,393	0,396	0,437
Höhe S (cm)	88,0	103,4	99,0	96,7	102,0

Tabelle 6: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	12	39	16	6	19
leb./tot	tot	tot	tot	tot	tot
Geschl.	männl.	männl.	männl.	männl.	männl.
Alter(Jahre)	36	24	25	62	25
bekleidet	nein	ja, o. Schuhe	ja, mit Schuhen	nein	nein
Länge (cm)	177	178	166	173,5	176
Gewicht (kg)	64,5	64,5	66	66,7	69,5
Achse - Schei- tel (cm)	126,5	132	125,5	124	125
y_1 (cm)	22	27	21	21	25
y_2	74	68	69	72	72
y_3	52	53	49	58	55
y_4	85	79	74	83	82
y_5	18,5	18	18	19	19
y_6	102	97	91	107	101
T (sec)	1,738	1,742	1,730	1,729	1,729
θ_L	2,93	2,955	2,88	2,85	2,87
a (cm)	52,7	52,7	51,5	51,0	48,9
θ_s	1,099	1,124	1,091	1,080	1,171
k^2 (m ²)	0,167	0,171	0,162	0,158	0,165
k (m)	0,409	0,413	0,402	0,398	0,406
Höhe S (cm)	103,2	98,1	92,0	100,5	99,9

Tabelle 7: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	40	18	9	29	34
leb./tot	tot	leb.	tot	tot	tot
Geschl.	männl.	männl.	männl.	männl.	männl.
Alter(Jahre)	17	38	38	30	24
bekleidet	nein	ja	nein	nein	nein
Länge (cm)	181	172	176,5	169,5	170
Gewicht (kg)	70,0	70,5	74,1	75,6	78,0
Achse - Scheitel (cm)	128	121	120	118,5	118
y_1 (cm)	23	26	24	23	20
y_2	71	65	70	66	67
y_3	59	50	58	53	50
y_4	87	84	82	81	83
y_5	19	20	19	19	23,5
y_6	104	102	104	96	97
T (sec)	1,662	1,718	1,723	1,705	1,726
θ_L	2,44	2,80	2,825	2,715	2,85
a (cm)	48,6	48,2	45,9	45,0	43,6
θ_s	0,753	1,125	1,232	1,153	1,336
k^2 (m ²)	0,105	0,156	0,163	0,149	0,168
k (m)	0,325	0,395	0,403	0,386	0,410
Höhe S (cm)	101,6	99,2	102,4	96,0	95,6

Tabelle 8: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	22	43	27	23	17
leb./tot	tot	tot	tot	tot	leb.
Geschl.	männl.	männl.	männl.	männl.	männl.
Alter(Jahre)	76	20	30	43	30
bekleidet	nein	nein	nein	nein	ja, mit Schuhen
Länge (cm)	175	180	186,5	171	184
Gewicht (kg)	83,6	90,6	91,6	92,3	125,5
Achse - Scheitel (cm)	112,5	113,5	118	107,5	107
y_1 (cm)	25	22	26	23	27
y_2	72	72	74	70	65
y_3	50	47	60	48	54
y_4	79	85	90	74	84
y_5	24	23	23	32	30
y_6	99	102	107	94	110
T (sec)	1,716	1,756	1,777	1,771	1,839
θ_L	2,785	3,05	3,185	3,145	3,61
a (cm)	40,7	37,5	37,1	36,8	27,1
θ_s	1,373	1,747	1,896	1,866	2,669
k^2 (m ²)	0,161	0,189	0,203	0,198	0,208
k (m)	0,401	0,435	0,450	0,445	0,456
Höhe S (cm)	103,2	104,0	105,6	100,3	104,1

Tabelle 9: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	36	41	35	13	30
leb./tot	tot	tot	tot	tot	tot
Geschl.	weibl.	weibl.	weibl.	weibl.	weibl.
Alter(Jahre)	80	33	28	73	47
bekleidet	nein	nein	nein	nein	nein
Länge (cm)	145	161	166	160	153,5
Gewicht (kg)	39,5	47,8	48,8	50,8	51,4
Achse - Scheitel (cm)	148	142,5	139	130	133
y_1 (cm)	22	23	24	24	24
y_2	57	60	66	64	62
y_3	46	49	45	45	48
y_4	66	72	78	71	71
y_5	18,5	18	15,5	19	17
y_6	83	88	91	88	86
T (sec)	1,802	1,759	1,749	1,746	1,730
θ_L	3,365	3,07	3,0	2,98	2,88
a (cm)	86,1	71,1	69,7	66,9	66,2
θ_s	2,376	2,600	0,581	0,656	0,583
k^2 (m ²)	0,093	0,123	0,116	0,126	0,111
k (m)	0,305	0,351	0,341	0,356	0,333
Höhe S (cm)	83,1	89,6	96,7	96,9	86,7

Tabelle 10: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	3	44	20	38	24
leb./tot	tot	tot	tot	tot	tot
Geschl.	weibl.	weibl.	weibl.	weibl.	weibl.
Alter(Jahre)	16	34	43	24	45
bekleidet	nein	nein	nein	nein	nein
Länge (cm)	163,5	164	162,5	162	160,5
Gewicht (kg)	51,7	53,2	55,2	56	57,1
Achse - Scheitel (cm)	123,5	136	130	133	128
y_1 (cm)	22	24	27	23,5	24,5
y_2	63	64	62	60	63
y_3	43	49	47	50	49
y_4	80	77	75	73	75
y_5	17	16	19	17,5	19,5
y_6	95	92	91	89	90
T (sec)	1,48	1,736	1,741	1,731	1,720
θ_L	2,19	2,92	2,955	2,87	2,805
a (cm)	52,1	63,9	61,6	60,7	59,5
θ_s	0,756	0,701	0,816	0,762	0,737
k^2 (m ²)	0,143	0,129	0,145	0,133	0,126
k (m)	0,378	0,359	0,380	0,365	0,356
Höhe S (cm)	92,1	91,9	94,1	89,7	92,0

Tabelle 11: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.	14	7	21	37	42	10
leb./tot	tot	tot	tot	tot	tot	tot
Geschl.	weibl.	weibl.	weibl.	weibl.	weibl.	weibl.
Alter(Jahre)	66	50	64	82	36	55
bekleidet	ja	nein	nein	nein	nein	nein
Länge (cm)	156,5	163	168	152,5	165	163
Gewicht (kg)	57,4	61,4	62,2	62,3	70,0	81,5
Achse - Scheitel (cm)	123,5	122	127	122,5	120,5	106
y ₁ (cm)	22,5	22	22,5	20	22	17
y ₂	63	66	68	58	65	66
y ₃	40	55	51	50	49	48
y ₄	72	79	77	70	76	74
y ₅	21	25	20	22	20	24
y ₆	89	90	100	88	90	92
T (sec)	1,713	1,715	1,722	1,696	1,705	1,671
θ_L	2,760	2,785	2,825	2,650	2,701	2,50
a (cm)	59,2	55,4	54,7	54,6	48,6	41,7
θ_s	0,703	0,863	0,927	0,755	1,014	1,051
k ² (m ²)	0,120	0,137	0,146	0,118	0,142	0,126
k (m)	0,346	0,371	0,382	0,344	0,377	0,355
Höhe s (cm)	92,2	96,4	95,7	84,6	93,1	98,1

Tabelle 12: Versuchsergebnisse

Protokoll Nr.		43	45	44
Ganzer Körper:	Gewicht	90,6	63,5	53,2
	Länge	180	178	164
	θ_s	1,747	1,241	0,701
	k^2	0,189	0,191	0,129
	k	0,435	0,437	0,359
	Höhe S	104	102	91,9
Untere Gliedmaße:	Gewicht	16,1	10,8	9,1
	Länge	95	98	84
	FS-Kniekehle	48	50	42
	Höhe S über FS	55	61,6	55
	dist. zu prox.	57,9:42,1	62,8:37,2	65,4:34,6
	k^2	0,115	0,051	0,056
	k	0,339	0,226	0,280
	θ_s Bein	0,188	0,056	0,052
Beide unt. Gliedmaßen	% des KG	35,5	34,0	34,2
	θ_s	0,376	0,112	0,104
	k^2	0,230	0,102	0,112
	k	0,678	0,452	0,560
Oberkörper mit Armen und Kopf:	G_o	58,4	41,9	35,0
	θ_{so}	0,149	0,585	0,210
	k_o^2	0,025	0,137	0,059
	k_o	0,158	0,370	0,240
	Höhe S_o	131	122,8	111,2
	e_o	27	20,8	19,3
Untere Gliedmaße:	$\frac{k}{l}$	0,356	0,231	0,333

1. Schwerpunkthöhe h_s

Die Schwerpunkthöhe um die horizontale, latero-laterale Schwerachse des Körpers, von der Fersensole ab gerechnet, beträgt im Mittel

$$h_s = (57 \pm 1,5)\%$$

der Körpergröße. Es besteht eine lineare Abhängigkeit der Schwerpunkthöhe von der Körpergröße, deren enge Beziehung der Korrelationskoeffizient $r = 0,94$ verdeutlicht. Die in der graphischen Darstellung 2 wiedergegebene Regressionsgerade lautet:

$$h_s = 0,63 \times \text{Körpergröße} - 0,1(\text{m})$$

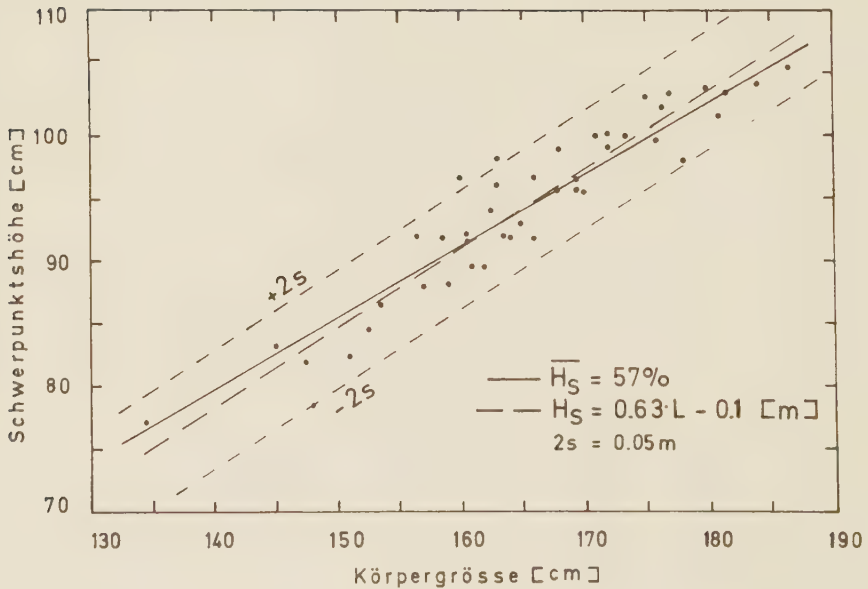
Die einfache Streuung um die Regressionsgerade beträgt $s_{h_s} \cdot 1 = 0,024 \text{ (m)}$.

Einen Eindruck von der Variabilität der Schwerpunkthöhe infolge unterschiedlichen Körpergewichtes, individuell differierender Körperproportionen und damit unterschiedlicher Massenverteilung bei annähernd gleicher Körpergröße vermittelt

Tabelle 13: Variabilität der Schwerpunkthöhe des Körpers bei annähernd gleicher Körpergröße, aber unterschiedlichem Körpergewicht

Prot. Nr.	Körpergröße	Körpergew. (kg)	h_s (cm)	Höhe d. spina i. ant.	Länge d. unteren Gliedmaßen
13	160	50,8	96,9	88	71
26	160,5	53,5	91,6	89	73
24	160,5	57,1	92,0	90	74
41	161	47,8	89,6	88	72
38	162	56	89,7	89	73
20	162,5	55,2	94,1	91	75
7	163	61,4	96,4	94	79
10	163	81,5	98,1	92	74
3	163,5	51,7	92,1	95	80
31	163,5	56,6	91,4	92	75

Graphische Darstellung 2: Schwerpunkthöhe als Funktion der Körpergröße. Durchgezogene Gerade: $H_S = 57\%$ der Körpergröße; unterbrochene Gerade: Regressionsgerade mit den Grenzen der zweifachen Streuung ($\pm 2s$).



Protokoll Nr. 38 und Nr. 10 zeigen, daß bei annähernd gleicher Körpergröße, aber um $\frac{2}{3}$ höherem Körpergewicht die Schwerpunktshöhe um über 8 cm ansteigen kann.

Eine andere Möglichkeit der Darstellung der Schwerpunktshöhe des Körpers ergibt sich aus der Abstandsmessung der Spina iliaca anterior superior von der Fersensole. Es hatte sich nämlich herausgestellt, daß die Körperschwerpunktshöhe mit ca. ± 5 cm Abweichung in Höhe der Verbindungslinie der beiden vorderen oberen Darmbeinstacheln liegt, oft sogar damit identisch ist (graph. Darstellung 3). Durch die einfache Messung des Abstandes der Spina iliaca anterior superior von der Fersensole läßt sich also bei normal proportionierten Personen mit praktisch gleicher Genauigkeit wie aus der Regression die Körperschwerpunktshöhe angeben. Diese Methode bereitet nur dann Schwierigkeiten, wenn bei adipösen Menschen die Spina iliaca anterior superior nicht exakt auffindbar ist.

Bei den drei im Hüftgelenk abgesetzten unteren Gliedmaßen verhielt sich die Strecke Fersensole - Schwerpunkt zu Femurkopf - Schwerpunkt der jeweiligen Extremität bei

Versuchsperson Nr. 43 wie 57,9 : 42,1

Versuchsperson Nr. 45 wie 62,8 : 37,2

Versuchsperson Nr. 44 wie 65,4 : 34,6 (siehe Tabelle 12).

Die Schwerpunktshöhe des Oberkörpers mit Kopf und beiden Armen ohne die unteren Gliedmaßen betrug bei

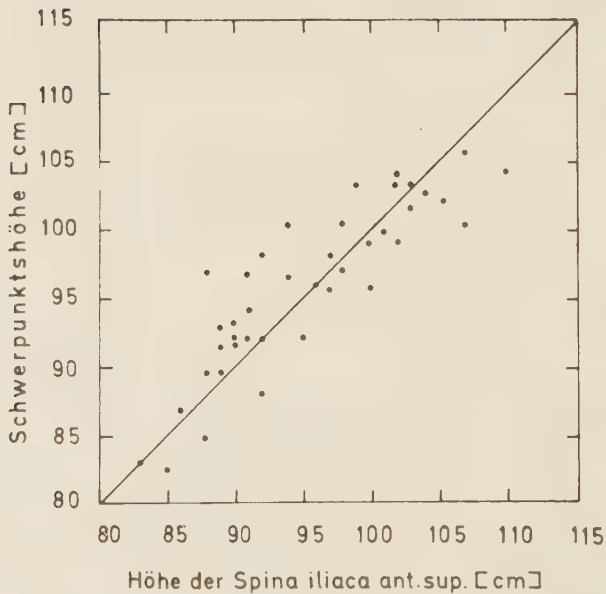
Versuchsperson Nr. 43 ca. 72,8% der Körperlänge

Versuchsperson Nr. 45 ca. 68,1% der Körperlänge

Versuchsperson Nr. 44 ca. 67,8% der Körperlänge.

Diese Daten dürfen nur als Orientierungswerte verstanden werden, da die unvermeidbaren Abweichungen der Schnittführung in den Hüftgelenken erhebliche Streuungen zur Folge haben.

Graphische Darstellung 3: Korrelation von Schwerpunkts-
höhe und Höhe der Spina iliaca
anterior superior. Bei den Meß-
punkten oberhalb der eingezeich-
neten 45° - Geraden liegt der
Schwerpunkt über, bei den darunter
liegenden Meßpunkten unterhalb
der Spina iliaca anterior superior.



2. Trägheitsmoment θ_s

Es gehörte zur Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, Beziehungen zwischen dem Körpergewicht bzw. der Körpergröße und dem Trägheitsmoment des Körpers um seine horizontale, latero-laterale Schwerachse herzustellen. Grundsätzlich kann gesagt werden, daß bei identischer Körpergröße das Trägheitsmoment mit steigendem Körpergewicht zunimmt. Da das Körpergewicht bei gleicher Körpergröße um 100 Prozent und mehr schwanken kann, sind auch die Trägheitsmomente in Bezug auf die Körpergröße größeren Schwankungen unterworfen (graph. Darstellung 4).

Dagegen besteht eine enge lineare Beziehung zwischen Körpergewicht und Trägheitsmoment um den Körperschwerpunkt mit einem Korrelationskoeffizienten von $r = 0,97$. Im Mittel nimmt das Trägheitsmoment von $0,68 \text{ mkps}^2$ bei 50 kg linear auf $1,64 \text{ mkps}^2$ bei 90 kg Körpergewicht zu (Tab. 14). Weibliche Personen liegen meist unterhalb, männliche Personen meist oberhalb der Mittelwerte, die als Regressionsgerade in der graph. Darstellung 5 wiedergegeben sind. Die Gleichung der Regressionsgeraden, mit deren Hilfe das Trägheitsmoment aus dem Körpergewicht errechnet werden kann, lautet:

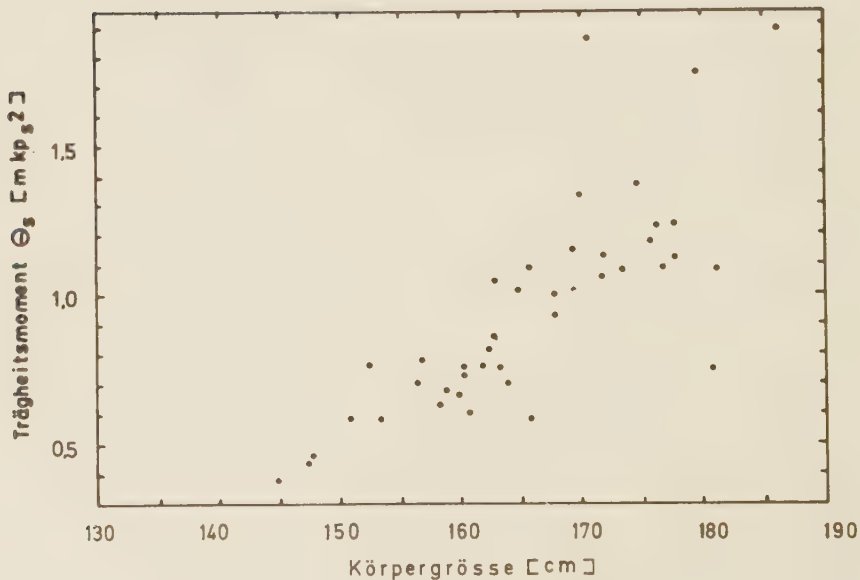
$$\text{Trägheitsmoment} = 0,0255 \times \text{Körpergewicht} - 0,61 \text{ (mkps}^2\text{)}$$

Die einfache Streuung um die Regressionsgerade beträgt $s = 0,11(\text{mkps}^2)$.

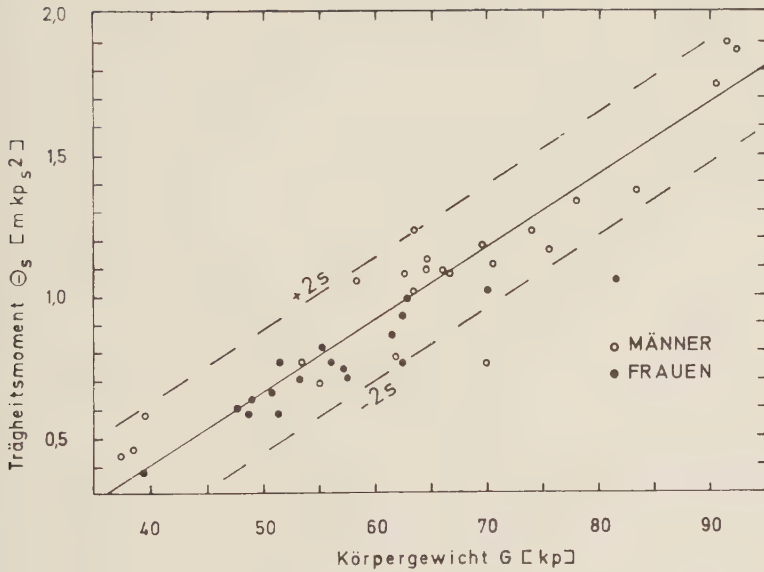
Tabelle 14: Körpergewichte und Trägheitsmomente um die latero-laterale Schwerachse

Körpergewicht (kp)	Trägheitsmoment um den Körperschwerpunkt (mkps^2) $\pm 2s = 0,22$
50	0,68
55	0,80
60	0,92
65	1,04
70	1,16
75	1,28
80	1,40
85	1,52
90	1,64

Graphische Darstellung 4: Trägheitsmoment des menschlichen Körpers um die latero-laterale Schwerachse als Funktion der Körpergröße.



Graphische Darstellung 5: Trägheitsmoment des menschlichen Körpers um die latero-laterale Schwerachse als Funktion des Körpergewichtes: Regressionsgerade mit den Grenzen der zweifachen Streuung.



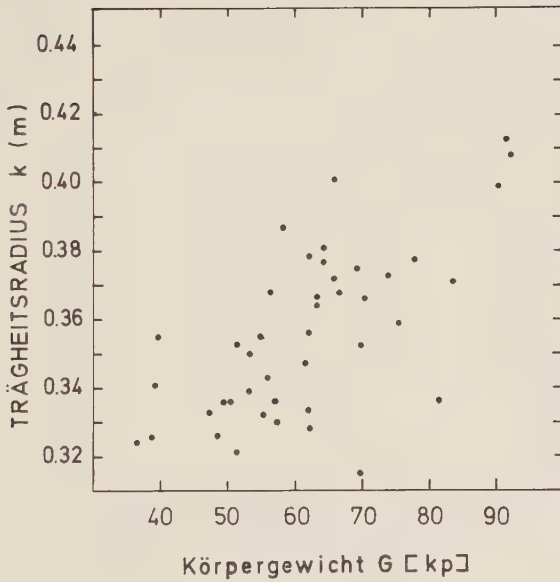
3. Trägheitsradius

Ist das Trägheitsmoment des Körpers um seinen Schwerpunkt bekannt, dann läßt sich der Trägheitsradius durch Division durch die Masse des Körpers errechnen. Vom Körpergewicht ist infolge der individuellen Proportionsdifferenzen kein hinreichend genauer Rückschluß auf die Größe des Trägheitsradius möglich (graph. Darstellung 6). Es besteht jedoch eine Korrelation zur Körpergröße (Korrelationskoeffizient $r = 0,87$). Der Trägheitsradius k nimmt im Mittel von 0,306 m bei 1,4 m auf 0,454 m bei 1,9 m Körpergröße linear zu (graph. Darstellung 7). Die Gleichung der Regression lautet:

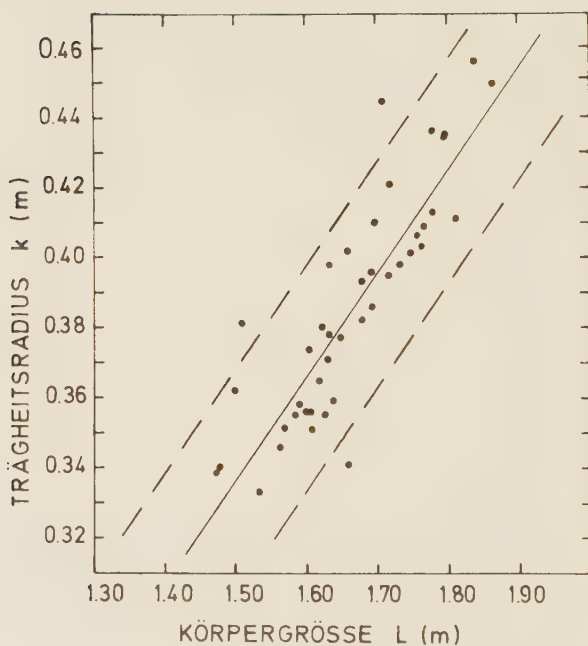
$$\text{Trägheitsradius } k = 0,297 \times \text{Körpergröße} - 0,11 \text{ (m)}$$

Die einfache Streuung um die Regressionsgerade beträgt $S_{k.1} = 0,016 \text{ (m)}$.

Graphische Darstellung 6: Trägheitsradius als Funktion
des Körpergewichtes.



Graphische Darstellung 7: Trägheitsradius als Funktion der Körpergröße: Regressionsgerade mit den Grenzen der zweifachen Streuung.



4. Ergebnisse der Pendelversuche

Die Schwerpunktshöhe der 16,1 kg schweren und 95 cm langen linken unteren Gliedmaße einer männlichen Leiche (Protokoll Nr. 43) betrug 57,9% der Gesamtlänge des Beines, bei der 10,8 kg schweren und 98 cm langen linken unteren Gliedmaße einer wesentlich schlankeren männlichen Leiche (Protokoll Nr. 45) 62,8% und bei der 9,1 kg schweren und 84 cm langen linken unteren Gliedmaße einer jungen Frauenleiche (Protokoll Nr. 44) 65,4%. Das Gewicht beider unteren Extremitäten zusammen entsprach mit 35,5%, 34% und 34,2% ca. $\frac{1}{3}$ des Körpergewichtes, während das Trägheitsmoment beider unteren Gliedmaßen mit $0,376 \text{ mkps}^2$, $0,112 \text{ mkps}^2$ und $0,104 \text{ mkps}^2$ nur 22%, 10% und 15% des jeweiligen Gesamtkörperträgheitsmomentes betrug. Als Trägheitsradius beider unterer Extremitäten wurde 0,678 m, 0,452 m und 0,560 m ermittelt im Vergleich zu 0,435 m, 0,437 m und 0,359 m des Gesamtkörpers.

IV. DISKUSSION DER ERGEBNISSE

An 29 männlichen und 16 weiblichen lebenden und toten Versuchspersonen wurden mit Hilfe einer Wippenkonstruktion die Schwerpunkthöhe des Körpers um die horizontale, latero-laterale Schwerachse und das Trägheitsmoment im Schwerpunkt ermittelt. Bei bekannter Körpergröße kann die Schwerpunkthöhe des Gesamtkörpers von der Fersensole ab entweder über die Regressionsgleichung

$$h_s = 0,63 \times \text{Körpergröße} - 0,1 \text{ (m)} \pm 0,024 \text{ (m)}$$

errechnet werden oder über die Prozentangabe

$$h_s = (57 \pm 1,5)\% \text{ der Körpergröße}$$

Die Schwerpunkthöhe der von WEBER (1836) untersuchten Leiche lag bei 56,7% der Körpergröße, die Schwerpunkthöhe der beiden Versuchspersonen von HARLESS (1860) bei 58,6% der Körpergröße über der Fersensole und entspricht damit weitgehend dem eigenen Ergebnis. BRAUNE und FISCHER (1889) bestimmten zwar an drei tiefgefrorenen Leichen die Schwerpunkte einzelner Körperteile und den anatomischen Gesamtkörperschwerpunkt, machten aber keine Angaben über die Höhe dieses Schwerpunktes, mit Ausnahme einer lebenden Versuchsperson, deren Körperschwerpunkthöhe mit Hilfe von Verhältniszahlen und einem Koordinatensystem errechnet wurde: Bei einem 169 cm großen und 58,7 kg schweren Mann lag der Schwerpunkt in aufrechter Normalstellung bei 91,7 cm über der Fersensole. Das entspricht 54,2% der Körpergröße und liegt damit 2,8% unter dem oben angegebenen Mittelwert. Diese Differenz erklärt sich aus dem Fehler der angenommenen Verhältniszahlen und den individuellen Proportionsunterschieden.

Weitere Vergleichsmöglichkeiten bietet die Schwerpunkthöhe der unteren Gliedmaßen. HARLESS (1860) fand den Schwerpunkt einer unteren Gliedmaße bei 58,4% ihrer Gesamtlänge über der Fersensole, bei BRAUNE und FISCHER (1889 und 1892) liegen die Ergebnisse zwischen 58,0% und 62,5% mit Seitendifferenzen beider Beine von 0,2 bis 2,8%. Mit 57,9% (Protokoll Nr. 43), 62,8% (Protokoll Nr. 45) und 65,4% (Protokoll Nr. 44) liegen die eigenen Messungen in derselben Größenordnung. Zu berücksichtigen ist dabei neben der unterschiedlichen Massenverteilung der Gliedmaßen bei adipösen und sehr schlanken Personen die nicht standardisierbare Schnittführung bei der Abtrennung der Extremität im Hüftgelenk: Ein zu tief angelegter Schnitt verschiebt den Schwerpunkt nach unten, ein zu hoch angelegter Schnitt nach oben.

Angaben über die Lage der Schwerpunkthöhe des Körpers zur Höhe der Spina iliaca anterior superior konnten in der Literatur nicht gefunden werden. Lediglich bei BRAUNE und FISCHER (1889) geht aus einer Zeichnung hervor, daß die Körperschwerpunkthöhe der 169 cm großen und 58,7 kg schweren lebenden Versuchsperson ca. 1 cm unterhalb der Verbindungslinie beider vorderer oberer Darmbeinstacheln liegt. Nach den eigenen Ergebnissen stimmen die Körperschwerpunkthöhe und die Höhe der Spinae iliaca anteriores superiores mit einer maximalen Streuung von ± 5 cm überein.

Im Gegensatz zu BRAUNE und FISCHER (1892), die nur an zwei gefrorenen Leichen die Trägheitsmomente einzelner Körperteile untersuchten, wurde in der vorliegenden Arbeit das Trägheitsmoment um den Gesamtkörperschwerpunkt bestimmt. Das Trägheitsmoment um den Körperschwerpunkt läßt sich mit Hilfe der Regressionsgleichung

$$\text{Trägheitsmoment} = 0,0255 \times \text{Körpergewicht} - 0,61 \text{ (mkps}^2\text{)}$$

aus dem Körpergewicht berechnen.

BRAUNE und FISCHER (1892) berechneten bereits die Trägheitsradien einzelner Körperteile, aber nicht des Körpers um den Gesamtschwerpunkt. Als Ergebnis ihrer Untersuchungen an zwei Leichen fanden sie, daß bei allen Gliedern des menschlichen Körpers das Verhältnis zwischen dem Trägheitsradius um den Schwerpunkt und der Länge des Gliedes nahezu konstant 0,30 ist. Bei den eigenen Messungen an drei unteren Gliedmaßen wurden Werte von 0,33, 0,35 und 0,23 ermittelt.

Das Gewicht beider unterer Gliedmaßen beträgt ca. $\frac{1}{3}$ des Körpergewichtes, das Gewicht des Kopfes liegt nach dem Ergebnis zweier Messungen zwischen 7 und 8% des Körpergewichtes. BARTER (1957) und BRAUNE und FISCHER (1889) fanden ähnliche Resultate.

V. ZUSAMMENFASSUNG

1. Es wurden die Schwerpunkthöhe und das Trägheitsmoment um die horizontale, latero - laterale Schwerachse des menschlichen Körpers an 45 Versuchspersonen bestimmt. Wie im Literaturteil ausführlich referiert, liegen dazu nur vereinzelte Untersuchungen vor.
2. Die Messungen wurden mit Hilfe einer speziell für diese Untersuchungen konstruierten schwingungsfähigen Wippe vorgenommen. Durch Pendelversuche konnten auch Schwerpunkthöhe und Trägheitsmoment von drei unteren Gliedmaßen ermittelt werden.
3. Die durchschnittliche Schwerpunkthöhe des Körpers betrug, von der Fersensohle ab gemessen, $(57 \pm 1,5)\%$ der Körpergröße. Schwerpunkthöhe und Körpergröße sind eng korreliert (Korrelationskoeffizient $r = 0,94$). Die Regressionsgleichung der linearen Beziehung lautet: $h_s = 0,63 \times l - 0,1$ (m)
einfache Streuung $S_{h_s \cdot l} = 0,024$ (m)
4. Mit ± 5 cm Abweichung vom Mittelwert liegt der Körperschwerpunkt in Höhe der beiden Spinae iliacae anteriores superiores.
5. Das Trägheitsmoment ist zum Körpergewicht eng korreliert (Korrelationskoeffizient $r = 0,97$). Im Mittel nimmt es von $0,5 \text{ mkps}^2$ bei 45 kg linear auf $1,5 \text{ mkps}^2$ bei 85 kg Körpergewicht zu. Die Regressionsgleichung ermöglicht die Berechnung des Trägheitsmomentes bei bekanntem Körpergewicht: $\Theta_s = 0,0255 \times G - 0,61$ (mkps^2). Die einfache Streuung um die Regressionsgerade beträgt $S_{\Theta \cdot G} = 0,11$ (mkps^2).

6. Der Trägheitsradius läßt sich nur zur Körpergröße korrelieren (Korrelationskoeffizient $r = 0,87$). Er nimmt im Mittel von 0,306 m bei 1,4 m auf 0,454 m bei 1,9 m Körpergröße linear zu. Die Regressionsgleichung lautet: $k = 0,297 \times l - 0,11$ (m). Die einfache Streuung um die Regressionsgerade beträgt $S_{k.l} = 0,016$ (m).
7. Messungen an drei isolierten unteren Gliedmaßen haben gezeigt, daß sowohl die Lage des Schwerpunktes als auch das Trägheitsmoment der unteren Gliedmaßen großen individuellen Schwankungen unterworfen ist. Die Schwerpunkthöhe betrug 57,9, 62,8 und 65,8% der Gesamtlänge des Beines (Ferse - Femurkopf). Das Trägheitsmoment beider unteren Gliedmaßen betrug 10, 15 und 22% des Trägheitsmomentes des gesamten Körpers.

VI. LITERATURVERZEICHNIS

1. AMAR, J.

The Human Motor : or the Scientific Foundations of
Labor and Industry.

E.P. Dutton Co., New York and Geo. Rutledge and
Sons, Ltd., London, 1920.

2. BARTER, J.T.

Estimation of the Mass of Body Segments.

WADC Technical Report 57 - 260, Wright Air Develop-
ment Center, Wright - Patterson Air Force Base, Ohio,
April 1957.

3. BORELLUS, J.A.

De motu animalium.

Lugduni Batavorum, 1679,

zit. nach FISCHER und BRAUNE, 1889.

4. BRAUNE, W., FISCHER, O.

Über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers mit
Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infante-
risten.

Abh. d. math. phys. Classe d. Königl. sächs. Ges.
d. Wiss., 15, 561 - 672, 1889.

5. BRAUNE, W., FISCHER, O.

Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen
Körpers und seiner Glieder.

Abh. d. math. phys. Classe d. Königl. sächs. Ges.
d. Wiss., 18, 421 - 492, 1892.

6. DEMPSTER, W.T.

Space Requirements of the Seated Operator.
Geometrical, Kinematic and Mechanical Aspects of
the Body with Special Reference to the Limbs.
WADC Technical Report 55 - 159, Wright Air Develop-
ment Center, Wright - Patterson Air Force Base,
Ohio, 1955.

7. FISCHER, O.

Der Gang des Menschen.
II. Teil: Die Bewegung des Gesamtschwerpunktes und
die äußeren Kräfte.
Abh. d. math. phys. Classe d. Königl. sächs. Ges. d. Wiss.,
25, 1 - 130, 1899.

8. FISCHER, O.

Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden
Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen,
sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen.
B.G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1906.

9. HANAVAN, E.P.

A Mathematical Model of the Human Body.
AMRL - TR - 64 - 102. Aerospace Medical Research
Laboratories, Wright - Patterson Air Force Base,
Ohio, October 1964.

10. HARLESS, W.

Die statischen Momente der menschlichen Gliedmaßen.
Abh. d. math. phys. Classe d. Königl. Bayr. Akad.
d. Wiss., 8, 1860, 1. Abt. München, 1857.
Zit. nach BRAUNE, W., FISCHER, O., 1889.

11. KROGMAN, W.M., JOHNSON, F.E.

Human Mechanics : Four Monographs Abridged.

AMRL - TR - 63 - 123. Aerospace Medical Research Laboratories, Wright - Patterson Air Force Base, Ohio, December 1963.

12. LIU, Y.K., LABORDE, J.M., VAN BUSKIRK, W.C.

Inertial Properties of a Segmented Cadaver Trunk:
Their Implications in Acceleration Injuries.

Aerospace Med.42(6), 650 - 657, 1971.

13. ROBBINS, D.H., SNYDER, R.G., Mc ELHANEY, J.H.,
ROBERTS, V.L.

A Comparison between Human Kinematics and the
Predictions of Mathematical Crash Victim Simulators.
Proceedings of Fifteenth Stapp Car Crash Conference,
Nov. 17 -19, 1971, Coronado, California, published
by: Society of Automotive Engineers, Inc., New York.

14. SANTSCHI, W.R., DUBOIS, J., OMOTO, C.

Moments of Inertia and Centers of Gravity of the
Living Human Body.

AMRL - TR - 63 - 36. Aerospace Medical Research
Laboratories, Wright - Patterson Air Force Base,
Ohio, May 1963,

zit. nach LIU et al. 1971.

15. VON MEYER, H.

Die wechselnde Lage des Schwerpunktes in dem mensch-
lichen Körper, ein Beitrag zur plastischen Anatomie.
Engelmann, Leipzig, 1863,

zit. nach BRAUNE, W., FISCHER, O., 1889.

16. VON MEYER, H.

Statik und Mechanik des menschlichen Körpers.

Engelmann, Leipzig, 1873,

zit. nach BRAUNE, W., FISCHER, O., 1889.

17. WEBER, W., WEBER, E.

Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge.

Göttingen, 1836,

zit. nach BRAUNE, W., FISCHER, O., 1889.

LEBENS LAUF

- 1946, 13.8., geboren in Fürstenzell bei Passau als Sohn
des praktischen Tierarztes Dr. Josef
Döschl und seiner Ehefrau Erna, geb.
Gierstorfer
- 1952 - 56 Volksschule in Fürstenzell
- 1956 - 65 Humanistisches Gymnasium Metten
- 1965 Abitur und Beginn des Studiums der Tier-
medizin an der Tierärztlichen Fakultät
der Universität München
- 1970 Abschluß des tierärztlichen Studiums mit
dem Staatsexamen, tierärztliche Approbation,
Eintritt in das vierte Semester Humanmedi-
zin der Medizinischen Fakultät der Univer-
sität München
- 1971 Ärztliche Vorprüfung
- 1972 Promotion zum Dr. med. vet. an der Tier-
ärztlichen Fakultät der Universität München
- 1974 Medizinisches Staatsexamen an der Medizi-
nischen Fakultät der Universität München

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. W. Spann für die Überlassung des Themas.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. G. Beier für seine großzügige Hilfsbereitschaft und seine wertvollen Ratschläge.

Ferner danke ich den Herren Berger, Fitzen und Zurewesten für ihre Mitarbeit bei der Durchführung der Versuche.

